

Mappa di Karnaugh

Le mappe di Karnaugh permettono di rappresentare e minimizzare funzioni logiche fino ad un massimo di sei variabili. Tali mappe rappresentano la tabella di verità di una funzione in forma bidimensionale. Le caselle adiacenti corrispondono a configurazioni delle variabili che differiscono per una ed una sola variabile.

Se si ricorda che $x_i p + \bar{x}_i p = p$ (\bar{x}_i ha il significato di x_i negato) con conseguente eliminazione della variabile x_i dove p rappresenta un prodotto qualsiasi delle variabili diverse da x_i , per minimizzare la funzione basta individuare le caselle adiacenti e quindi il gruppo invariante p (costituito dal prodotto di variabili dirette o negate).

Quindi le mappe di Karnaugh sono una particolare forma di tabella della verità che consente immediatamente di operare alcune semplificazioni del tipo:

$$A \cdot B + A \cdot \bar{B} = A \cdot (B + \bar{B}) = A$$
$$A \cdot (\bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot C + B \cdot C + B \cdot \bar{C}) = A$$

Assegnata una funzione logica, la mappa di Karnaugh corrispondente non è altro che una rappresentazione grafica della tabella della verità della stessa funzione.

$$Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$$

L'operazione più conveniente consiste nel marcare le variabili di ingresso con degli 1 quando esse non sono negate e con degli 0 quando esse sono negate, come indicato sotto:

$$Y = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C$$

000
010
011
110
100

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

La mappa di Karnaugh di una funzione ad n variabili di ingresso consiste in un rettangolo di 2^n caselle, dove ogni casella corrisponde ad uno dei possibili stati (combinazioni) delle variabili di ingresso con la caratteristica che passando da una casella all'altra in ogni direzione (ma non in diagonale) cambia una sola delle variabili. Debbono essere considerate adiacenti anche le caselle di estremità di una riga o di una colonna, come se la mappa fosse disegnata su una superficie chiusa su se stessa. In ognuna delle caselle viene posto il valore assunto dalla funzione (variabile Y) booleana per quello stato (per quella combinazione delle variabili di ingresso).

Si riportano degli (1) in corrispondenza delle combinazioni delle variabili di ingresso evidenziate nella funzione. La tabella della verità è una sintesi del comportamento della variabile di uscita Y in corrispondenza di tutti i possibili valori delle variabili di ingresso. Dalla tabella della verità di una funzione si può subito ricavare la corrispondente mappa di Karnaugh.

Usando il codice Gray per rappresentare tutte le possibili combinazioni con n variabili binarie ovvero 2^n , si può partendo da n zeri e poi si continua ad incrementare di 1 in binario

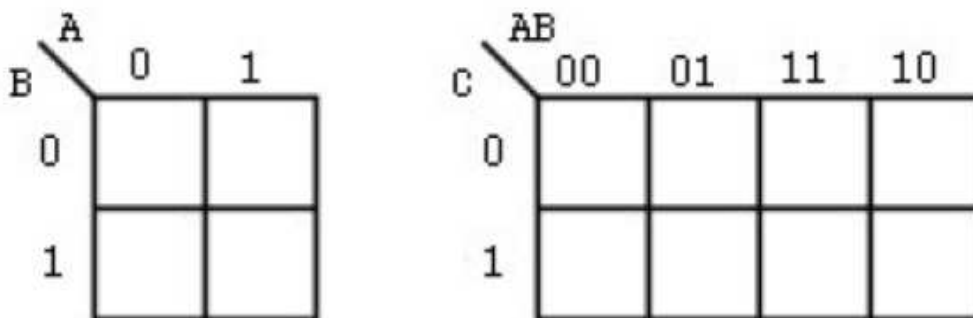
ad es. con n=2:

- 00
- 01
- 10
- 11

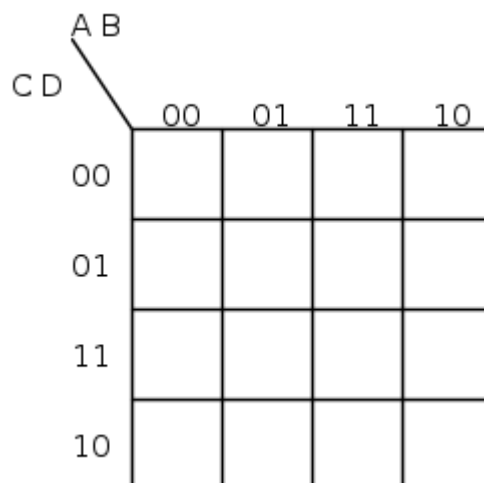
Come si vede ad ogni passaggio da una combinazione a quella successiva muta una sola variabile.

Per le mappe di Karnaugh serve elencare le combinazioni in modo tale che tra due celle consecutive ci sia esattamente un solo bit di differenza; questo modo di elencare le combinazioni si chiama appunto Codice Gray.

Si riportano nella figura seguente le mappe di Karnaugh rispettivamente per due e tre variabili di ingresso



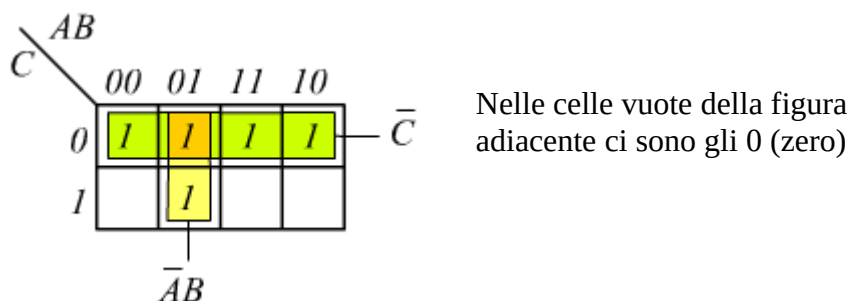
Si riporta nella figura seguente la mappa di Karnaugh per quattro variabili di ingresso



Le regole, per semplificare la funzione logica, che si devono seguire sono:

- Bisogna individuare il minor numero di gruppi (che copre tutti gli 1 della mappa);
- Ciascun gruppo deve contenere il maggior numero di 1 adiacenti (il numero di 1 che costituisce un gruppo deve formare una potenza del 2, si scelgono perciò gruppi da due 1 o da quattro 1 etc o da otto 1 etc.);
- Sono considerabili adiacenti le caselle di estremità;
- Eventuali 1 isolati costituiscono un gruppo e debbono essere riportati integralmente;
- Da ogni gruppo si estrae un termine che contiene le variabili di ingresso che non variano passando da una casella all'altra del raggruppamento stesso, ciascuna variabile sarà in forma vera o negata a secondo se vale 1 o 0 nel raggruppamento;
- La funzione logica minimizzata sarà data dalla somma logica dei termini estratti dalla mappa.

Esempio



Come si nota il minimo numero di gruppi è due, ciascun gruppo contiene tanti 1 sempre in ragione delle potenze del 2 (cioè 4 e 2 uno) nel primo gruppo orizzontale passando da una casella all'altra l'unica variabile che non cambia è la C che rimane impostata a 0 per cui verrà estratta come termine \bar{C} .

Nel gruppo verticale passando da una casella all'altra le nice variabili che non cambiano sono la A che rimane impostata a 0 (\bar{A}) e la B che rimane impostata a 1 (B); verrà dunque estratto il termine $\bar{A}B$; in definitiva la funzione semplificata sarà:

$$Y = \overline{A}B + \overline{C}$$

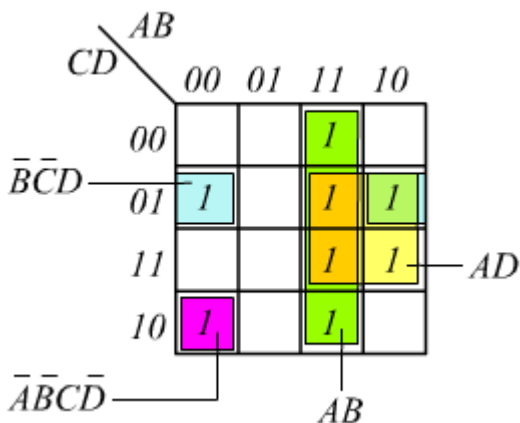
Esempio

Supponiamo ora di dover semplificare una funzione con 4 variabili, la rappresentazione usuale della mappa sarà la seguente:

$$Y = \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D} + ABCD + ABC\overline{D} + \overline{A}BCD + \overline{A}B\overline{C}D$$

$0001 \quad 0010 \quad 1100 \quad 1101 \quad 1111 \quad 1110 \quad 1011 \quad 1001$

si riportano tali configurazioni nella mappa di Karnaugh



In questo caso si evidenziano le due celle non contigue (disgiunte) sulla seconda riga da cui viene estratto il termine $\overline{B}\overline{C}D$ e il termine isolato in basso a sinistra che deve essere riportato integralmente. Nella colonna verticale passando da una casella all'altra non cambiano le variabili AB che rimangono impostate a 1 (AB) mentre il gruppo da 4 quadrato non vede cambiare le Variabili A che rimane impostata a 1 e D che ugualmente rimane a 1 (AD).

La funzione risultante sarà:

$$Y = AB + AD + \overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D$$