

SCOMPOSIZIONE DEL TRINOMIO DI SECONDO GRADO ax^2+bx+c

Pg 1703

DATO UN TRINOMIO DI SECONDO GRADO ax^2+bx+c
CONSIDERO L'EQ. ASSOCIATA $ax^2+bx+c=0$
E NE CALCOLO IL $\Delta = b^2 - 4ac$. A QUESTO PUNTO, CI SONO 3 CASI:

CASO (1): SE $\Delta > 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ E POSSO

SCOMPORRE CON LA FORMULA:

$$\underline{ax^2+bx+c = a \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2)}$$

ESEMPIO: SCOMPORRE IL TRINOMIO

$$2x^2 - x - 3$$

$$a = 2$$

$$b = -1$$

$$c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 1 + 24 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm 5}{4} \quad \begin{cases} \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = x_1 \\ -\frac{4}{4} = -1 = x_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow 2x^2 - x - 3 = 2 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)(x+1) = 2 \cdot \left(\frac{2x-3}{2}\right)(x+1) =$$

$\uparrow$
[FORMULA: $a \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2)$] = $(2x-3)(x+1)$

CASO (2): SE $\Delta = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \rightarrow$ LA FORMULA

VISTA NEL CASO PRECEDENTE DIVENTA:

$$\underline{ax^2+bx+c = a \cdot (x-x_1)(x-x_1) = a(x-x_1)^2}$$

ESEMPIO: SCOMPORRE $4x^2 - 4x + 1$

$$a = 4$$

$$b = -4$$

$$c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 4 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 4 \cdot \left(\frac{2x-1}{2}\right)^2 =$$

$$[a \cdot (x-x_1)^2] = 4 \cdot \frac{(2x-1)^2}{2^2} = (2x-1)^2$$

OSS: SE CI SI ACCORGE CHE $4x^2 - 4x + 1$ È UN QUADRATO DI BINOMIO, SI FANNO MENO PASSAGGI:

pg 2 17/03

$$4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$$

$$A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2 = (A - B)^2$$

$$A^2 = 4x^2 \rightarrow A = \sqrt{4x^2} = 2x$$

$$B^2 = 1 \rightarrow B = \sqrt{1} = 1$$

$$2 \cdot A \cdot B = 2 \cdot 2x \cdot 1 = 4x \quad \checkmark$$

IN OGNI CASO, I DUE MODI DI PROCEDERE SONO EQUIVALENTI

CASO ③: SE $\Delta < 0 \rightarrow$ L'EQ. ASSOCIATA NON HA SOLUZIONI E NON SI PUÒ SCOMPORRE.
IN TAL CASO VALE CHE IL TRINOMIO HA SEGNO COSTANTE UGUALE A QUELLO DEL COEFFICIENTE a .
CWE: SE $a > 0$ IL TRINOMIO È POSITIVO } PER OGNI VALORE DI x
SE $a < 0$ IL TRINOMIO È NEGATIVO }

ESEMPI: • SCOMPORRE $3x^2 + 2x + 4$

$$\begin{aligned} a &= 3 \\ b &= 2 \\ c &= 4 \end{aligned}$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 4 - 48 = -44 < 0$$

$\rightarrow$ NON POSSO SCOMPORRE.

$a = 3 > 0 \rightarrow$ SO CHE IL TRINOMIO DATO È SEMPRE POSITIVO

• SCOMPORRE: $-x^2 + x - 5$

$$\begin{aligned} a &= -1 \\ b &= 1 \\ c &= -5 \end{aligned}$$

$$\Delta = 1^2 - 4(-1)(-5) = 1 - 20 = -19 < 0$$

$\rightarrow$ NON POSSO SCOMPORRE.

$a = -1 < 0 \rightarrow$ IL TRINOMIO È SEMPRE NEGATIVO

PS 3 14/03

DISEQUAZIONI DI 2° GRADO IN FORMA CANONICA: $ax^2 + bx + c \geq 0$

ESEMPIO GUIDA:

RISOLVERE LA DISEQUAZIONE DI 2° GRADO

$$\underline{x^2 - 8x + 7 > 0}$$

1° PASSAGGIO: SCOMPORRE IL TRINOMIO
 $x^2 - 8x + 7 = a \cdot (x - x_1)(x - x_2) = 1 \cdot (x - 7)(x - 1)$

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -8 \\ c &= 7 \end{aligned}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 64 - 28 = 36$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} \begin{cases} \frac{14}{2} = 7 = x_1 \\ \frac{2}{2} = 1 = x_2 \end{cases}$$

2° PASSAGGIO: RISCRIVO LA DISEQ. SOSTITUENDO
AL TRINOMIO LA SUA SCOMPOSIZIONE

$$\underline{(x - 7) \cdot (x - 1) > 0}$$

3° PASSAGGIO: PER CAPIRE IL SEGNO DEL PRODOTTO
STUDIO IL SEGNO DI CIASCUN FATTORE.
 VADO QUINDI A RISOLVERE LE SEGUENTI DISEQUAZIONI:

$x - 7 > 0 \rightarrow x > 7$, ($x - 7$ È MAGGIORE DI 0, QUINDI HA SEGNO
 "+" QUANDO x È MAGGIORE DI 7, QUINDI
 A DESTRA DI 7)

$$x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$$

4° PASSAGGIO: FACCIO LA TABELLA DEI SEGNI
o GRAFICO DEI SEGNI.

[SCRIVO I VALORI TROVATI IN ORDINE CRESCENTE]

	$x < 1$	$1 < x < 7$	$x > 7$
$x - 7$	-	-	+
$x - 1$	-	+	+
$(x - 7)(x - 1)$	+	-	+

[RIPORTO IL SEGNO DI CIASCUN FATTORE. ES: ABBIAMO VISTO CHE $x - 7$ HA SEGNO + A DESTRA DI 7 E QUINDI HA SEGNO - A SINISTRA DI 7.]

[STABILISCO IL SEGNO DEL PRODOTTO CON LA REGOLA DEI SEGNI.]

• 5° PASSAGGIO: STABILISCO GLI INTERVALLI CHE SONO SOLUZIONE DELLA DISEQUAZIONE DATA. LA DISEQUAZIONE CHIEDE QUANDO IL TRINOMIO DATO E' MAGGIORE DI 0, CIOE' QUANDO E' CHE HA SEGNO + $\Rightarrow$ GUARDO LA 3^a RIGA DELLA TABELLA (L'IE' IL SEGNO DEL PRODOTTO): I SEGNI + SONO A SINISTRA DI 1 E A DESTRA DI 4:
 $\Rightarrow$ SOLUZIONI: $X < 1 \vee X > 4$

ALTRO ESEMPIO:

$$X^2 - 5X + 4 < 0$$

1° $a=1$
 $b=-5$
 $c=4$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9$$
$$X_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} \quad \begin{cases} \frac{8}{2} = 4 = X_1 \\ \frac{2}{2} = 1 = X_2 \end{cases}$$
$$\rightarrow X^2 - 5X + 4 = 1 \cdot (X-4) \cdot (X-1)$$

2° $(X-4)(X-1) < 0$

3° OSS.: LO STUDIO DEL SEGNO DEI 2 FATTORI SI FA SEMPRE COL MAGGIORE, INDIPENDENTEMENTE DAL VERSO DELLA DISEQUAZIONE!

$$X-4 > 0 \rightarrow X > 4$$
$$X-1 > 0 \rightarrow X > 1$$

4°

		$1 < X < 4$	
$X-4$	-	-	+
$X-1$	-	+	+
$(X-4)(X-1)$	+	-	+

5° LA DISEQUAZIONE CHIEDE QUANDO E' CHE IL TRINOMIO E' MINORE DI 0, CIOE' NEGATIVO (SEGNO -)
 $\rightarrow$ PRENDO L'INTERVALLO CORRISPONDENTE AL - DELLA 3^a RIGA DELLA TABELLA, OSSIA LE X TRA 1 E 4: $1 < X < 4$

SCRIVERE I SEGUENTI TRINOMI

P8 S 17/03

① $x^2 - 10x + 9$

② $x^2 - 7x + 6$

③ $2x^2 + 5x + 3$

④ $8x^2 - 6x + 1$

⑤ $2x^2 + x + 3$

⑥ $-x^2 + x - 4$

RISOLVERE LE SEGUENTI DISEQUAZIONI DI 2° GRADO:

⑦ $x^2 - 10x + 9 > 0$

⑧ $x^2 - 7x + 6 \geq 0$

⑨ $2x^2 + 5x + 3 < 0$

⑩ $8x^2 - 6x + 1 \geq 0$

⑪ $2x^2 + x + 3 > 0$

⑫ $-x^2 + x - 4 > 0$

① $X^2 - 10X + 9$

$a = 1$
 $b = -10$
 $c = 9$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 100 - 36 = 64 > 0$

$\Rightarrow$ posso scomporre

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 \pm 8}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{18}{2} = 9 = X_1 \\ \frac{2}{2} = 1 = X_2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow X^2 - 10X + 9 = 1 \cdot (X - 9)(X - 1) = (X - 9)(X - 1)$$

 $a \cdot (X - X_1) \cdot (X - X_2)$

② $X^2 - 7X + 6 = (X - 6) \cdot (X - 1)$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25$

$$X_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{12}{2} = 6 = X_1 \\ \frac{2}{2} = 1 = X_2 \end{array} \right.$$

③ $2X^2 + 5X + 3 = 2 \cdot (X + \frac{3}{2})(X + 1) = 2 \cdot (\frac{2X + 3}{2})(X + 1) = (2X + 3) \cdot (X + 1)$

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1$

$$X_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{4} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \\ -\frac{4}{4} = -1 \end{array} \right.$$

④ $9X^2 - 6X + 1$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 - 36 = 0$

$\Rightarrow X_1 = X_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow 9X^2 - 6X + 1 = 9 \cdot (X - \frac{1}{3})^2 = 9 \cdot (\frac{3X - 1}{3})^2 = 9 \cdot \frac{(3X - 1)^2}{3^2} = (3X - 1)^2$$

 $a \cdot (X - X_1)^2$

ALTRO MODO DI SCOMPORRE:

$9X^2 - 6X + 1 = (3X - 1)^2$

$A^2 = 9X^2 \rightarrow A = \sqrt{9X^2} = 3X$

$B^2 = 1 \rightarrow B = \sqrt{1} = 1$

$2 \cdot A \cdot B = 2 \cdot 3X \cdot 1 = 6X \quad (\text{OK})$

$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$

⑤ $2x^2 + x + 3$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1 - 12 = -11 < 0$$

$\Rightarrow$ non si può scomporre.

$a = 2 > 0 \Rightarrow$ il trinomio ha segno costante positivo

⑥ $-x^2 + x - 4$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) = 1 - 16 = -15 < 0$$

$\Rightarrow$ non si può scomporre

$a = -1 < 0 \Rightarrow$ il trinomio ha segno costante negativo

PER RISOLVERE LE DISEQUAZIONI DA ⑦ A ⑫ USO LE SCOMPOSIZIONI / RISULTATI GIÀ TROVATI NEGLI ES DA ① A ⑥

⑦ $(x-9) \cdot (x-1) \geq 0$

$$x-9 > 0 \Rightarrow x > 9$$

$$x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

	$x < 1$		$9 < x$
$x-9$	-	-	+
$x-1$	-	+	+
$(x-9)(x-1)$	<u>+</u>	-	<u>+</u>

$$\Rightarrow x < 1 \vee x > 9$$

⑧ $(x-6) \cdot (x-1) \geq 0$

$$x-6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 6$$

(SE NEL TESTO C'È ANCHE L'UGUALE, SI METTE ANCHE NELLO STUDIO DEL SEGNO)

$$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

	$x \leq 1$		$6 \leq x$
$x-6$	-	-	+
$x-1$	-	+	+
$(x-6)(x-1)$	<u>+</u>	-	<u>+</u>

OSS: IL PALLINO PIENO NEL GRAFICO SERVE PER RICORDARSI DI METTERE ANCHE IL 6 E L'1 NELLE SOLUZIONI.

$$x \leq 1 \vee x \geq 6$$

⑨ $(2x+3) \cdot (x+1) < 0$

LO STUDIO DEL SEGNO SI FA SEMPRE CON $>$.
 E VERSO DELLA DISEQ DATA LO GUARDO ALLA FINE, PER
 CAPIRE QUALI SONO GLI INTERVALLI DELLE SOLUZIONI.

$$2x+3 > 0 \Rightarrow \frac{2x}{2} > -\frac{3}{2} \rightarrow x > -\frac{3}{2}$$

$$x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

	$-\frac{3}{2}$	x	-1	
$2x+3$	-	+	+	
$x+1$	-	-	+	
$(2x+3)(x+1)$	+	-	+	

$$-\frac{3}{2} < x < -1$$

⑩ $(3x-1)^2 \geq 0$

SEMPRE VERA: UN QUADRATO È SEMPRE MAGGIORE O
 UGUALE A 0.
 $\Rightarrow$ SI SCRIVE: SOLUZ. $\forall x \in \mathbb{R}$ (TUTTI I NUMERI REALI
 SONO SOLUZIONI).

⑪ $2x^2+x+3 > 0$

NELL'ESERCIZIO ⑤ ABBIAMO VISTO CHE IL TRINOMIO AL
 1° MEMBRO È SEMPRE POSITIVO.
 LA DISEQ. MI CHIEDE PER QUALI VALORI DI x IL TRINOMIO
 È MAGGIORE DI 0 (ONERO HA SEGNO POSITIVO)
 $\Rightarrow$ LA DISEQ. È VERIFICATA QUALUNQUE SIA IL VALORE
 DATO A x
 $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

⑫ $-x^2+x-4 > 0$

SEMPRE NEGATIVO (VEDI ES ⑥)
 $\Rightarrow$ NON CI SONO VALORI DI x CHE RENDONO IL
 TRINOMIO POSITIVO (MAGGIORE DI 0)
 $\Rightarrow$ È IMPOSSIBILE: NON CI SONO SOLUZIONI.