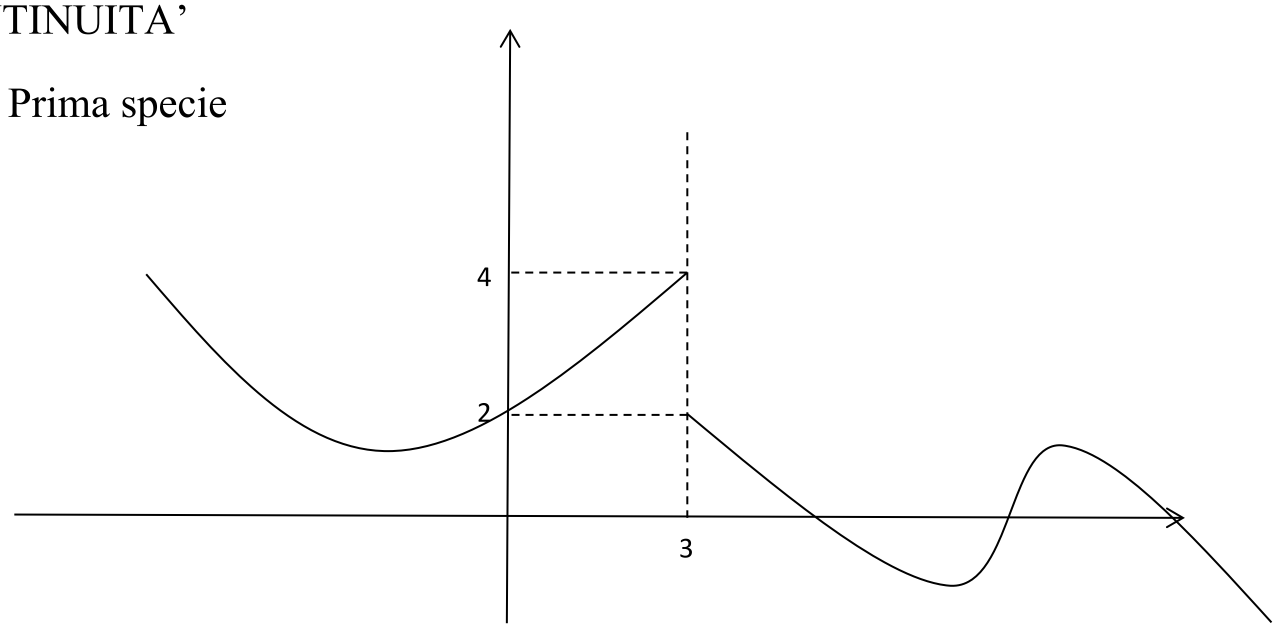
CONTINUITA'

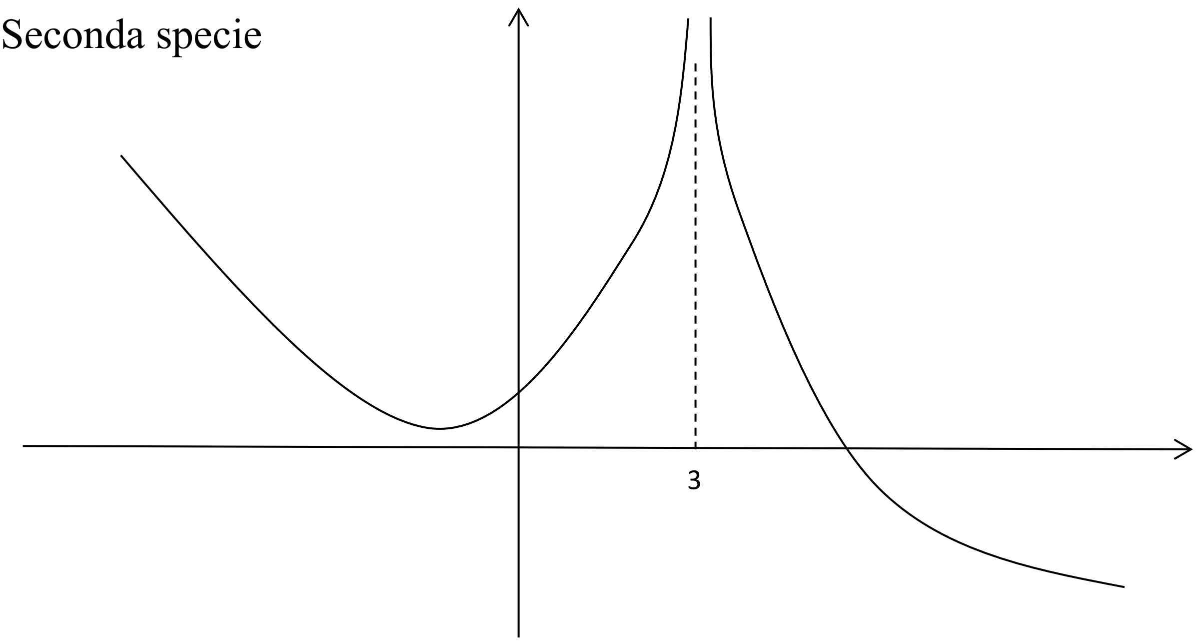
1. Prima specie



x*=*3 è il punto di discontinuità di prima specie perché $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 2$ e $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 4$

e i due limiti sono diversi (vedi definizione a pag 194: punti di salto)

2.Seconda specie

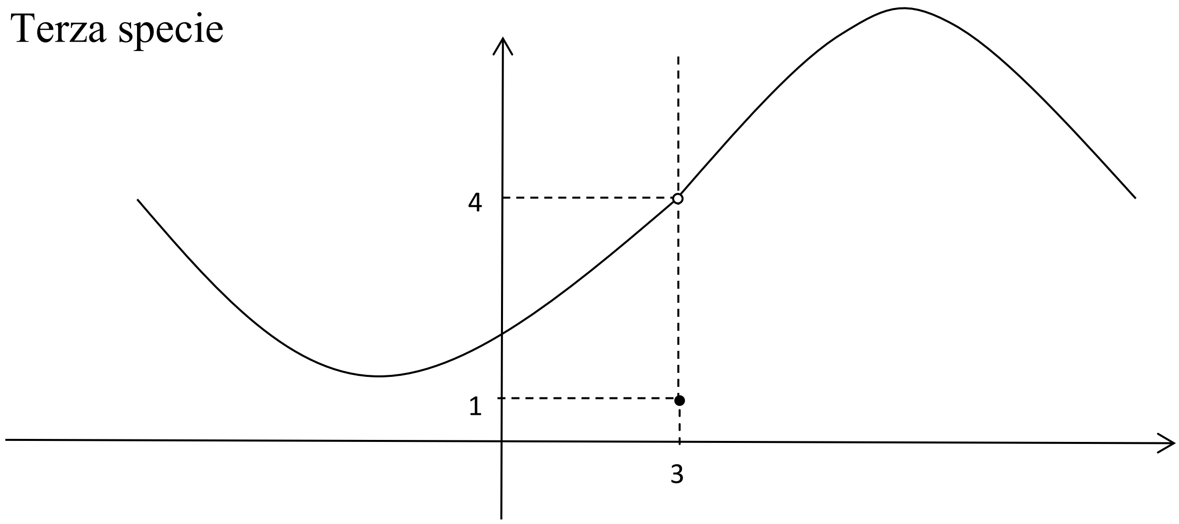


x*=*3 è il punto di discontinuità di seconda specie perché $\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$

e i due limiti sono infiniti (vedi definizione a pag 194)

N.B. La discontinuità di seconda specie si verifica anche quando il limite non esiste, cosa che non succede mai per le funzioni razionali fratte che noi trattiamo.

2. Terza specie



x=3 è il punto di discontinuità di terza specie perché $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = 4$

ma *f(x0)* o non esiste o se esiste assume un valore diverso da $\lim_{x\to 3} f(x)$ (vedi definizione a pag 193: punto di discontinuità eliminabile)

3. Funzione continua nel punto x_0

In conclusione perché la funzione sia continua non deve succedere nessuna delle tre cose, ovvero deve succedere che il valore che la funzione assume nel punto x_0 sia uguale al valore dei due limiti, destro e sinistro:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

(vedi definizione a pag. 116, ripresa a pag 192)

Esempio 1 (pag 205 n.1)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

Consideriamo il limite e il valore che assume la funzione in *x=1*

$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{0}{0}$ forma di indecisione che si risolve scomponendo in fattori Numeratore e Denominatore

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

Siccome la funzione è definita in modo che se *x=1* $f(1)=2$, allora il valore del limite è uguale al valore che assume la funzione, dunque $f(x)$ **è continua** nel punto *x=1*

Esempio 2 (pag 205 n.2)

$f(x) = \frac{1}{x^3-x}$ nel punto *x=1* non esiste, infatti il suo dominio è D:$\forall x \in R/x \neq 0 \wedge x \neq \pm 1$

Perciò **non può essere continua** in *x=1* perché $\nexists f(1)$

Se non è continua c'è un punto di discontinuità, per stabilire quale bisogna calcolare

$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{0^{\pm}} = \pm\infty$ dove con il $\pm\infty$ intendiamo i due risultati se andiamo a separare il limite destro e il limite sinistro

Quindi *x=1* è un **punto di discontinuità di seconda specie**

Esempio 3 (pag 205 n.2)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Ricorda che $|x-1|$ dovendo essere sempre positivo , può scriversi così:

a. $|x-1| = x-1$ se $x > 1$, perché in questo caso il polinomio $x-1$ è positivo pertanto il valore assoluto è uguale al numero stesso
b. $|x-1| = -(x-1) = -x+1$ se $x < 1$, che è il caso in cui essendo $x-1$ negativo, per farlo diventare un numero positivo gli devo cambiare il segno

Perciò quando calcolo il limite destro devo considerare il caso a, quando calcolo il limite sinistro devo considerare il caso b

$\lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1$ e $\lim_{x \to 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$

Quindi *x=1* è un **punto di discontinuità di prima specie** perché i limiti destro e sinistro sono entrambi finiti ma diversi a prescindere dal valore di $f(1)$