

ALGEBRA DI BOOLE

L'algebra di Boole è una struttura matematica basata su variabili che possono assumere due valori: vero (V) e falso (F). Utilizza tre operazioni logiche, o connettivi, AND, OR, NOT.

Tramite questa algebra si possono comporre proposizioni logiche (anche complesse) che a loro volta potranno essere vere o false.

Ad esempio:

consideriamo le frasi **A** = "l'Italia è uno stato" e **B** = "l'Italia confina con la Russia". **A** e **B** sono variabili logiche, in particolare A è vera e B è falsa.

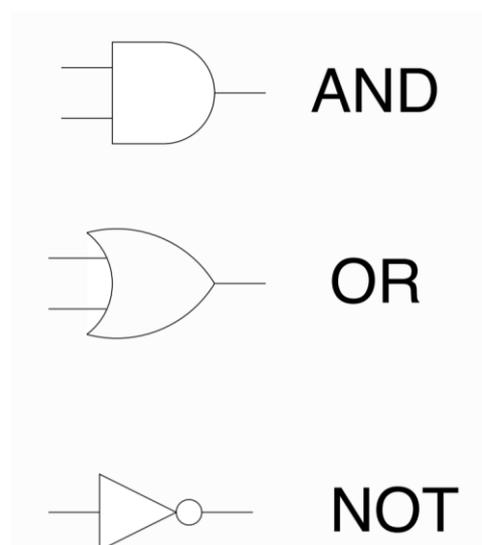
Possiamo collegare **A** e **B** tramite i connettivi **AND**, **OR**, **NOT** per creare espressioni logiche nuove di cui indagare poi il valore di verità, cioè scoprire se sono vere o false:

A and B = "l'Italia è uno stato e confina con la Russia" è chiaramente falsa

A or B = "l'Italia è uno stato o confina con la Russia" può suonarci strana, ma è una frase logicamente vera

notA = "l'Italia non è uno stato" è falsa, mentre **notB** = "l'Italia non confina con la Russia" è vera.

I computer hanno dei piccoli circuiti in cui il passaggio di corrente simula il comportamento dei connettivi, pertanto risulta spesso utile rappresentare i connettivi graficamente, tramite i **circuiti logici**.



Il modo più immediato di capire se una certa proposizione logica è vera o falsa è tramite le **tabelle (o tavole) di verità**, vediamo come sono fatte:

Nelle prime colonne si inseriscono i possibili valori (Vero o Falso) delle variabili contenute nella proposizione, dopodiché si valuta la verità o falsità della proposizione a seconda dei valori di verità assunti dalle variabili.

Vediamo le tavole di verità per i connettivi:

A	B	A and B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A	B	A or B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A	notA
V	F
F	V

È semplice ricordare le tavole di verità dei connettivi AND, OR, NOT:

- **A and B** è vera quando sia A che B sono vere, altrimenti è falsa
- **A or B** è vera quando almeno uno tra A e B è vero, altrimenti è falsa
- **notA** ha il valore opposto rispetto a A: è vera quando A è falsa, è falsa quando A è vera

Abbiamo detto che i connettivi si possono usare per creare frasi più complicate, ad esempio consideriamo la proposizione **A and notB**, vediamo la sua tabella di verità:

A	B	notB	A and notB
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

In cui abbiamo inserito, per aiutarci, la colonna **notB**, così da poterla usare per “calcolare” $A \text{ and } \text{not}B$. Nelle tavole di verità le colonne relative alle variabili (nel nostro esempio A e B) contengono semplicemente le possibili combinazioni di Vero e Falso, mentre quelle relative a proposizioni logiche vengono “calcolate” in base ai valori di verità delle variabili. Per riempire, ad esempio, la colonna di **notB** si guarda riga per riga che valore assume **B** e (ricordando la definizione di **not**) mettiamo sotto **notB** il valore opposto.

Due proposizioni logiche si dicono **equivalenti** quando hanno la stessa tavola di verità. Se questo accade significa che, fondamentalmente, le due proposizioni dicono la stessa cosa.

Una proposizione sempre vera si dice **tautologia**. Una sempre falsa si dice **contraddizione**.

ESEMPIO: $(A \text{ and } \text{not}A)$ è una contraddizione. $(A \text{ or } \text{not}A)$ è una tautologia. Fanne la tavola di verità:

A	notA	A and notA
V		
F		

A	notA	A or notA
V		
F		

È importante ricordare che c’è una gerarchia fra i connettivi: prima va considerato il **not**, poi **and** e infine **or**.

Ad esempio la proposizione **notA and B** va letta come se ci fossero le parentesi **(notA) and B** e non **not(A and B)**. Per vedere che le due proposizioni sono diverse compilate le loro tavole di verità

A	B	notA	notA and B
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

A	B	A and B	not(A and B)
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

ESERCIZI SVOLTI

not(A or B)

A	B	A or B	not(A or B)
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

(A and B) or notB

A	B	A and B	notB	(A and B) or notB
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	F	F	F
F	F	F	V	V

(A or B) and C

A	B	C	A or B	(A or B) and C
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

ESERCITAZIONE

A	B	notA	notA and B
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

A	B	A and B	A and (A and B)
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

A	B	notB	notB or B	(notB or B) and A
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

A	B	notA	notA and B	not(notA and B)	B or not(notA and B)
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				