IPSIA "G. MARCONI" - PRATO

CORSO DI MATEMATICA

Classe II B

Argomenti delle lezioni:

Insegnante : Prof.ssa Nesi Antonella

1. EQUAZIONI LINEARI DI PRIMO GRADO

a) Una generica equazione lineare di primo grado può essere scritta nella forma:

$$\boxed{\mathbf{ax + b = 0}}$$

in cui ***a*** e ***b*** sono **numeri** qualsiasi (interi o frazioni) ed in particolare:
a è il ***coefficiente dell'incognita*** (x)
b è il ***termine noto***

Un'equazione scritta con il termine incognito al primo membro ed il termine noto al secondo membro è scritta in FORMA NORMALE :

$$\boxed{\mathbf{a}x\mathbf{ = b}}$$

Esempi:

L'equazione	$2x = 1$	è scritta in forma normale
L'equazione	$3x - 5 = 0$	NON è scritta in forma normale

b) Trovare la SOLUZIONE dell'equazione significa determinare i valori che, sostituiti all'incognita *x*, rendono vera l'uguaglianza.

***Esempio**:*
Nell'equazione $2x = 1$

- il valore $\frac{1}{2}$ è una soluzione in quanto, sostituendolo all'incognita, verifica l'uguaglianza: $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ cioè $1 = 1$
- il valore 1 NON è una soluzione in quanto, sostituendolo all'incognita, NON verifica l'uguaglianza: $2 \cdot 1 \neq 1$ cioè $2 \neq 1$

c) In base al numero di soluzioni che ammette, un'equazione si dice:

- **DETERMINATA** se ammette **UNA soluzione**
- **INDETERMINATA** se ammette **INFINITE soluzioni**
- **IMPOSSIBILE** se **NON HA soluzioni**

Esempi:

L'equazione $\frac{1}{2}x = 1$ ha per soluzione il valore x = 2, quindi è DETERMINATA

L'equazione $2x = 2x$ ha infinite soluzioni, quindi è INDETERMINATA

L'equazione $x + 1 = x - 1$ non ha soluzioni, quindi è IMPOSSIBILE

d) Perrisolvereun'equazionedi primo grado, è necessario riportarla in forma normale: *ax =b*

Procedimento:

I. *Si riportano ambo i membri allo stesso denominatore (m.c.m. dei denominatori)*
II. *Si elimina il denominatore moltiplicando ambo i membri per la stessa quantità*
III. *Si eseguono i calcoli*
IV. *Si spostano al primo membro i termini contenenti l'incognita e al secondo membro i termini noti (numeri), <u>ricordandosi di cambiare il segno ogni volta che un termine viene spostato da un membro all'altro</u>*
V. *Si sommano i termini simili sia al primo membro sia al secondo membro riducendo l'equazione in forma normale*
VI. *Si trova la soluzione dividendo ambo i membri per il coefficiente della x*

Esempio: $\frac{2x-3}{4} + x = x - 1$

I. $\frac{2x-3+4x}{\mathbf{4}} = \frac{4(x-1)}{\mathbf{4}}$

II. $\boldsymbol{4}\,\frac{2x-3+4x}{4} = \frac{4(x-1)}{4}\cdot \boldsymbol{4}$

III. $2x - 3 + 4x = 4x - 4$

IV. $2x - \mathbf{4x} + 4x = \mathbf{3} - 4$

V. $\mathbf{2x = -1}$

VI. $\frac{2x}{\mathbf{2}} = \frac{-1}{\mathbf{2}}$ *quindi* $\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}}$

2. EQUAZIONI FRAZIONARIE DI PRIMO GRADO

Si dicono FRAZIONARIE le equazioni in cui l'incognita compare al denominatore.

esempio: $\frac{x+1}{x-2} = 0$

Dato che una frazione esiste solamente se il denominatore è diverso da zero (non è possibile dividere per zero)**, dobbiamo determinare la <u>CONDIZIONE DI ESISTENZA</u> dell'equazione ponendo la condizione cheil denominatore sia diverso da zero,** cioè:

$x - 2 \neq 0$ cioè $x \neq 2$

Quindi poniamo come condizione di esistenza che x sia diverso da 2, in modo che il denominatore non sia nullo:

C.E. : $\boldsymbol{x \neq 2}$

Dopo aver determinato la condizione di esistenza, il procedimento per risolvere un'equazione frazionaria è lo stesso di quello adottato per risolvere un'equazione lineare.

Una volta trovata la soluzione, però, dobbiamo confrontarla con la condizione di esistenza e dichiarare se la soluzione ottenuta è accettabile o non accettabile

Esempi:

- $\boxed{\frac{1}{x+1} + 3 = 5}$

Procedimento:

1) *Si determina la CONDIZIONE DI ESISTENZA:*

$x + 1 \neq 0$ *quindi* ***C.E.:*** $x \neq -1$

2) *Si riducono entrambi i membri allo stesso denominatore (m.c.m. = x+1):*

$$\frac{1 + 3(x+1)}{x+1} = \frac{5(x+1)}{x+1}$$

3) *Si eliminano i denominatori :* $(x+1)\frac{1+3(x+1)}{x+1} = \frac{5(x+1)}{x+1} \cdot (x+1)$

4) *Si eseguono i calcoli per ridurre l'equazione in forma normale:* $-2x = 1$

5) *Si trova la soluzione dividendo ambo i membri per il coefficiente della x:*

$\frac{-2x}{-2} = \frac{1}{-2}$ *quindi* $x = -\frac{1}{2}$ ***La soluzione è accettabile***

- $\boxed{\frac{x^2-2x-3}{x-3} = \frac{2x+1}{2}}$

C.E.: $x - 3 \neq 0$ ***quindi*** ***C.E.:*** $x \neq 3$

$\frac{2(x^2-2x-3)}{2(x-3)} = \frac{(2x+1)(x-3)}{2(x-3)}$ *m.c.m.* $2(x-3)$

$$2x^2 - 4x - 6 = 2x^2 - 6x + x - 3$$

$x = 3$ ***La soluzione non è accettabile perchè questo valore è stato escluso per la condizione di esistenza.***

Lezione n. 2 – Giovedì 4 aprile 2013

1. DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO LINEARI

Una disequazione è un'espressione matematica del tipo: $\boxed{ax > b}$

A. ***Valgono le stesse proprietà delle equazioni*:**

- sommando o sottraendo la stessa quantità al primo ed al secondo membro il risultato non cambia;
- moltiplicando o dividendo per la stessa quantità al primo ed al secondo membro il risultato non cambia;
  ma in questo caso bisogna tener presente che <u>moltiplicando o dividendo per un numero negativo CAMBIA il VERSO della disequazione</u>.

Esempi:

- $2x > 3$

Posso dividere per 2 ambo i membri senza cambiare il verso della disequazione:

$$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}x > \frac{3}{2} \qquad \textit{quindi} \qquad x > \frac{3}{2}$$

- $-2x > 3$

Se divido per (-2) ambo i membri devo cambiare il verso della disequazione:

$$\frac{1}{\cancel{-2}} \cdot (\cancel{-2}x) < \frac{3}{-2} \qquad \textit{quindi} \qquad x < -\frac{3}{2}$$

B. A differenza delle equazioni che, se determinate, ammettono una unica soluzione, nelle disequazioni <u>la soluzione è un insieme infinito di soluzioni</u>.

In base al tipo di soluzioni possiamo avere disequazioni:

- **DETERMINATE: Se esiste un insieme di valori che rendono vera la disequazione (*es.* $x > 3$*)***
- **INDETERMINATE: Se scompaiono i termini contenenti l'incognita e la disequazione diventa un'espressione sempre vera*(es.: 4<10)***
- **IMPOSSIBILI: Se scompaiono i termini contenenti l'incognita e la disequazione diventa un'espressione sempre falsa *(es. 3 > 8)***

***Esempi*:**

- $\boxed{2x - 7 > 3}$

Si portano al primo membro i termini con l'incognita ed al secondo membro i termini noti (ricordandosi di cambiare il segno ad un termine ogni volta che passa da un membro all'altro):

$$2x > 3 + 7 \qquad \textit{quindi} \qquad 2x > 10$$

Dividiamo per il coefficiente della x e, siccome questo è positivo, non cambiamo il segno della disequazione:

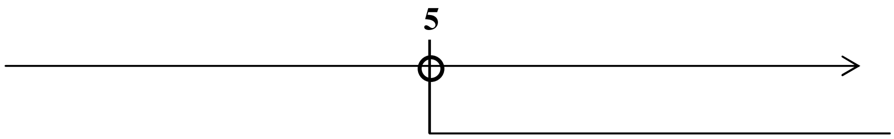
$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} > \frac{10}{2} \qquad \textit{quindi} \qquad x > 5$$

La disequazione $2x - 7 > 3$ è verificata per ogni valore della *x* che sia maggiore di 5.

Possiamo riportare in forma grafica l'insieme delle soluzioni ($x > 5$) rappresentandole come una semiretta continua:

il cerchio vuoto in corrispondenza del numero 5 significa che il valore 5 è escluso dall'insieme delle soluzioni

retta dei numeri:



- $\boxed{3 - 5x \le 13}$

$$-5x \le 13 - 3 \qquad \textit{quindi} \qquad -5x \le 10$$

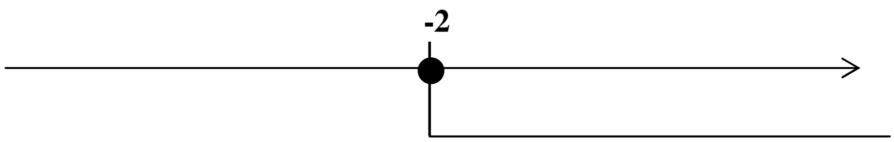
Dividiamo per il coefficiente della x e, siccome questo è negativo, cambiamo il segno della disequazione:

$$\frac{\cancel{-5}x}{\cancel{-5}} \ge \frac{10}{-5} \qquad \textit{quindi} \qquad x \ge -2$$

La disequazione $3 - 5x \le 13$ è verificata per ogni valore della x che sia maggiore di -2.

Possiamo riportare in forma grafica l'insieme delle soluzioni ($x \ge -2$):
il cerchio pieno in corrispondenza del numero -2 significa che il valore -2 è compreso nell'insieme delle soluzioni

retta dei numeri:



2. DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO FRATTE

Disequazione di primo grado in cui l'incognita compare al denominatore.

A. Si determina la condizione di esistenza: denominatore $\neq 0$

E' necessario riportare la disequazione nella forma: $\frac{ax+b}{cx+d} \leq 0$

B. E' necessario studiare separatamente il numeratore ed il denominatore per determinare in quale intervalli di valori sono negativi o positivi.
Per convenzione, indipendentemente da quanto scritto nella disequazione da risolvere, poniamo:

$$\boldsymbol{ax+b \geq 0}$$

$$\boldsymbol{cx+d} > 0$$ **(non può essere = 0 !!!)**

e determiniamo separatamente il segno sia del numeratore sia del denominatore per i diversi valori dell'incognita.

C. Il segno della frazione (positivo o negativo) nei diversi intervalli di valori viene calcolato sulla base del segno di numeratore e denominatore.

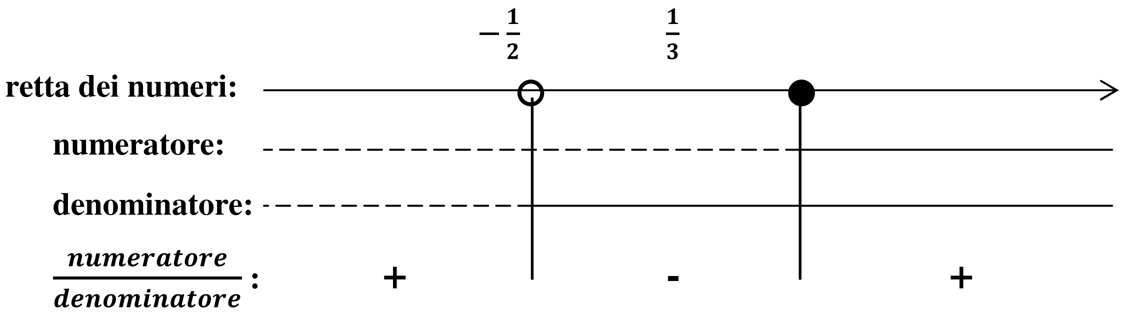
Esempio: $\frac{3x-1}{2x+1} \leq 0$ *C.E.:* $x \neq -\frac{1}{2}$

Numeratore: $3x-1 \geq 0$ **per** $x \geq \frac{1}{3}$
$3x-1 < 0$ **per** $x < \frac{1}{3}$

Denominatore: $2x+1 > 0$ **per** $x > -\frac{1}{2}$
$2x+1 < 0$ **per** $x < -\frac{1}{2}$

Riportiamo in forma grafica entrambe le soluzioni:

- **linea continua: l'insieme di valori in cui la disequazione è positiva**
- **linea tratteggiata: l'insieme di valori in cui la disequazione è negativa**



La disuguaglianza $\frac{3x-1}{2x+1} \leq 0$**è verificata per i valori di** x **compresi tra** $-\frac{1}{2}$ **e** $+\frac{1}{3}$**quindi scriviamo che l'insieme delle soluzioni è:** $\boxed{-\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{3}}$

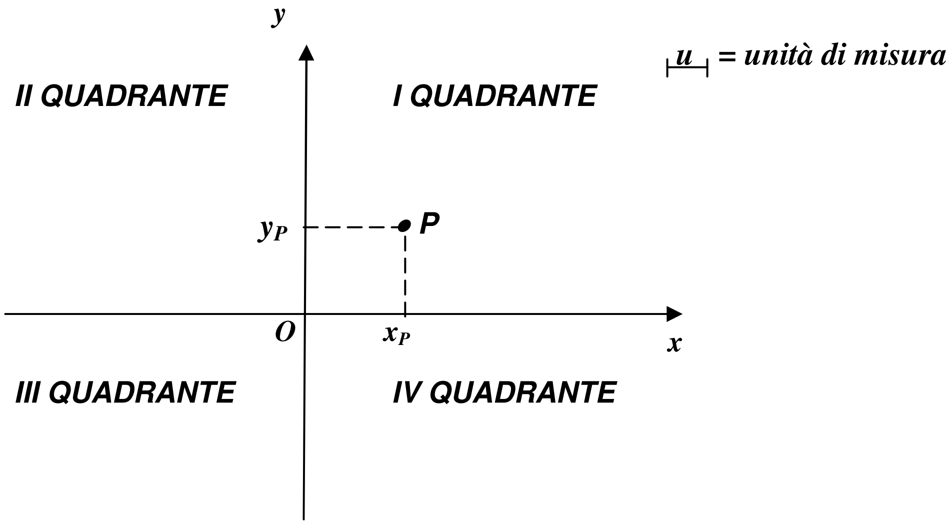
Lezione n. 4 – Giovedì 11 aprile 2013
PIANO CARTESIANO

A. Il ***piano cartesiano*** è un piano caratterizzato da ***duerette di riferimento, perpendicolari ed orientate***:
   - ***asse delle ascisse***, o ***asse x***
   - ***asse delle ordinate***, o ***asse y***

Le due rette di riferimento si intersecano in un punto detto ***ORIGINE*** e l'***orientamento*** delle rette è fissato con una ***freccia*** che indica il verso positivo:

- da sinistra a destra per l'asse delle ascisse: tutti i punti a destra dell'origine sono positivi, quelli a sinistra sono negativi;
- dal basso verso l'alto per l'asse delle ordinate: tutti i punti in alto rispetto all'origine sono positivi, quelli in basso sono negativi;

Il piano cartesiano è suddiviso dalle due rette di riferimento in quattro ***QUADRANTI*** numerati in senso antiorario***:***



B. Una volta stabilita una ***UNITA' DI MISURA*** **è possibile associare ogni punto delle rette di riferimento ad un*NUMERO REALE***.
C. Qualsiasi punto del piano è individuato da una ***coppia ordinata di valori***che rappresentano le ***coordinate cartesiane*** e si indica$(x_P;y_P)$:
   x_P è l'***ascissa*** e y_P è l'***ordinata*** del punto *P*.

   L'origine *O* ha coordinate cartesiane *(0;0)*

D. Nel piano cartesiano una *retta* è rappresentata da un'*equazione in due incognite:*

scritta in***forma implicita*** $ax + by + c = 0$

oppure

scritta in ***forma esplicita*:** $y = mx + q$ in cui $q = -\frac{c}{b}$ $m = -\frac{a}{b}$

q = ***intercetta***, individua il punto in cui la retta interseca l'asse y

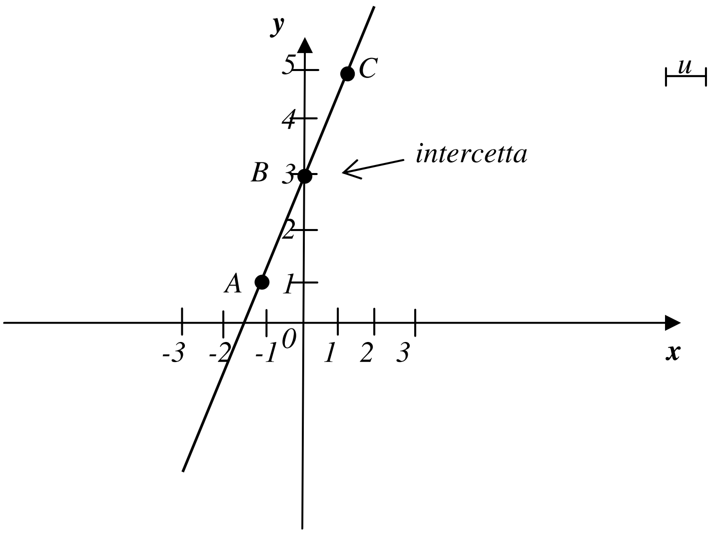
m = ***coefficiente angolare***, determina la pendenza della retta:

m > 0 per le rette passanti per il I e III quadrante
m < 0 per le rette passanti per il II e IV quadrante

Le coordinate cartesiane di tutti i punti che appartengono alla retta sono le infinite soluzioni dell'equazione $\boldsymbol{y = mx + q}$, ad esempio:

I punti A(-1;1), B(0;3), C(1;5), ….. appartengono alla retta $y = 2x + 3$

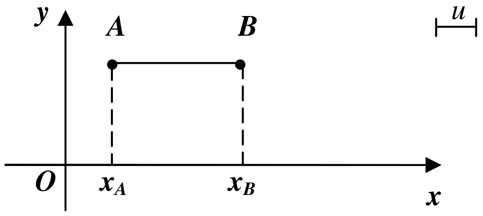
x	y
-1	1
0	3
1	5
...	...

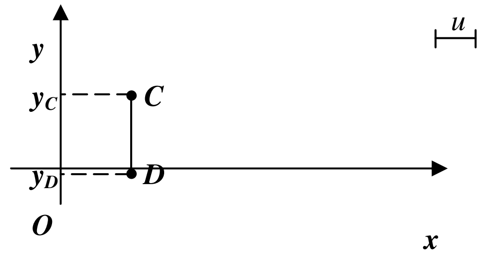


Rette particolari:

- Tutte le (infinite) rette ***che passano per l'origine*** hanno intercetta ***q = 0,*** quindihanno equazione $\boldsymbol{y = mx}$
- ***L'asse delle ascisse*** ha equazione ***y = 0*** in quanto tutti i punti che si trovano sull'asse delle ascisse hanno tutti ordinata y = 0.
- ***L'asse delle ordinate*** ha equazione ***x = 0***in quanto tutti i punti che si trovano sull'asse delle ordinate hanno tutti ascissa x = 0.
- Ogni ***retta parallela all'asse delle ascisse*** ha equazione ***y = k***(k = qualsiasi numero reale)
- Ogni ***retta parallela all'asse delle ordinate*** è rappresentata con l'equazione ***x = k*;**
- La bisettrice del I e III quadrante ha equazione $\boldsymbol{y = x}$
- La bisettrice del II e IV quadrante ha equazione $\boldsymbol{y = -x}$

E. DISTANZA TRA DUE PUNTI





La distanza tra due punti che hanno la stessa ordinata (A e B) è determinata dal valore assoluto della differenza tra le ascisse dei due punti (x_A *e* x_B): $\boldsymbol{d_{AB}=d_{BA}=|x_A-x_B|}$

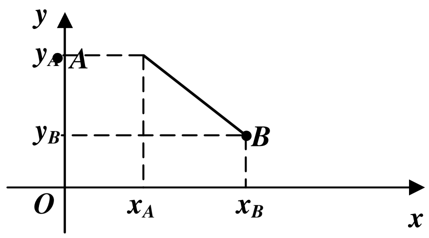
La distanza tra due punti che hanno la stessa ascissa (C e D)è determinata dal valore assoluto della differenza tra le ordinate dei due punti (y_C *e* y_D): $\boldsymbol{d_{CD}=d_{DC}=|y_C-y_D|}$

Esempi:

Calcolare la distanza tra i punti A(2;3) e B(5;3)Calcolare la distanza tra i punti A(1;1) e B(1;6)

$\boldsymbol{d_{AB} = |x_A-x_B|= |2\text{-}5| = 3}$

$\boldsymbol{d_{AB} = |y_A-y_B|= |1\text{-}6| = 5}$



La ***distanza tra due punti qualsiasi*** si calcola con la seguente formula, che equivale al Teorema di Pitagora:

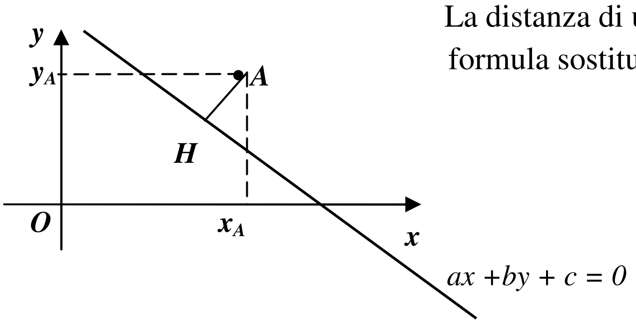
$$\boldsymbol{d_{AB}=d_{BA}=\sqrt[2]{(xA-xB)^2+(yA-yB)^2}}$$

Esempio:

Calcolare la distanza tra i punti A(2;7) e B(5;3)

$$\boldsymbol{d_{AB} =\sqrt[2]{(xA-xB)^2+(yA-yB)^2} = \sqrt[2]{(2-5)^2+(7-3)^2} =\sqrt[2]{9+16} =\sqrt[2]{25} = 5}$$

F. DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA



La distanza di un punto da una retta si calcola con la seguente formula sostituendo alle incognite, nell'equazione della retta, le coordinate del punto A:

$$\boldsymbol{d_{AH} = \frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Esempio:

Calcolare la distanza tra il punto A(4;6) e la retta 3x + 2 y -1 = 0

$$\boldsymbol{d_{AH} = \frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|3\cdot 4+2\cdot 6-1|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{23}{\sqrt{25}} = \frac{23}{5}}$$

G. ***RETTE PERDENDICOLARI E PARALLELE***

Data l'equazione di una retta $\boldsymbol{y = mx + q}$

Qualsiasi ***rettaparallela*** a questa ha lo stesso coefficiente angolare: $\boldsymbol{m' = m}$

Qualsiasi ***retta perpendicolare*** a questa ha un coefficiente angolare $\boldsymbol{m' = -\frac{1}{m}}$

Esempio: Data la retta $\boldsymbol{y = 3x - 10}$ le infinite rette parallele alla rettahanno coefficiente angolare $\boldsymbol{m'}$ **= 3** le infinite rette perpendicolari alla rettahanno coefficiente angolare $\boldsymbol{m' = -\frac{1}{3}}$

H. ***RETTA PASSANTE PER UN PUNTO***

Dato un punto ***P*** $\boldsymbol{(x_P;y_P)}$, esistono infinite rette passanti per questo punto, aventi coefficienti angolari diversi, ma **fissato un coefficiente angolare** $\boldsymbol{m}$ **possiamo determinare l'equazione della rettache passa per P**con la seguente formula:

$$\boldsymbol{y - y_P = m(x - x_P)}$$

Esempio: Determinare l'equazione della retta passante per il punto P (2;-4) : Sostituisco i dati nella formula: $y - y_P = m(x - x_P)$ $y + 4 = m(x - 2)$ Tra queste rette, scrivi l'equazione della retta che ha coefficiente angolare m = 3: $y + 4 = 3(x - 2)$ cioè $y = 3x - 10$

Esempio: Determinare l'equazione della retta passante per il punto P (2;-4) e perpendicolare alla retta 3x + y = 0. Il coefficiente angolare della retta data è -3, quindi il coefficiente angolare della retta perpendicolare deve essere $+\frac{1}{3}$ Sostituisco i dati nella formula: $y - y_P = m(x - x_P)$ $y + 4 = \frac{1}{3}(x - 2)$ quindi $y = \frac{1}{3}x - \frac{14}{3}$

I. RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI

Dati due punti A$(x_1;y_1)$ eB$(x_2;y_2)$esiste una sola retta passante per questi punti, la cui equazione può essere determinata con la formula:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Esempio:

Determinare l'equazione della retta passante per i punti A(1;-2) e B(-4;3)

Sostituisco i dati nella formula: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

$$\frac{y-(-2)}{3-(-2)} = \frac{x-1}{-4-1}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene l'equazione della retta: $y = -x - 1$

Esempio:

In un piano cartesiano rappresenta i punti di coordinate: A(0; 0), B(3; 4) e C(12;-5), poi unisci i punti dati e calcola la misura del perimetro e l'area del triangolo ABC.

1. ***Disegno i punti sul piano cartesiano***

2. ***Calcolo la lunghezza dei lati:***

$d_{AB} = \sqrt{(xA - xB)^2 + (yA - yB)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$d_{AC} = \sqrt{(xA - xC)^2 + (yA - yC)^2} = \sqrt{(0-12)^2 + (0+5)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$

$d_{CB} = \sqrt{(xC - xB)^2 + (yC - yB)^2} = \sqrt{(12-3)^2 + (-5-4)^2} = \sqrt{81+81} = \sqrt{162}$

3. ***Calcolo l'equazione della retta passante per A e C:***

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Sostituendo i valori ottengo: $\frac{y-0}{0-4} = \frac{x-0}{0-3}$ quindi $y = \frac{4}{3}x$

4. ***Per calcolare l'altezza relativa al lato AC, posso utilizzare la formula della distanza di un punto da una retta, considerando il punto B(3; 4) e la retta $\boldsymbol{y = \frac{4}{3}x}$, che scritta in forma implicita diventa $\boldsymbol{\frac{4}{3}x - y = 0}$:***

$$d_{BH} = \frac{\left|\frac{4}{3}\cdot 3 - 1\right|}{\sqrt{\frac{4}{3}^2 + (-1)^2}} = \frac{|4-1|}{\sqrt{\frac{16}{9}+1}} = \frac{3}{\sqrt{\frac{25}{9}}} = \frac{3}{\frac{5}{3}} = 3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$$

5. ***Calcolo il perimetro del triangolo ABC:***

2p = AB+BC+AC = 5 + $\sqrt{162}$ *+ 13 = 18 +* $\sqrt{162}$

6. ***Calcolo l'area del triangolo:***

$$A = \frac{AC \cdot BH}{2} = \frac{13 \cdot \frac{9}{5}}{2} = \frac{117}{10}$$

Lezione n. 3 – Giovedì 18 aprile 2013
SISTEMI DI EQUAZIONI

Un sistema di equazioni viene utilizzato per risolvere problemi in cui due condizioni devono essere verificate <u>contemporaneamente</u>, ad esempio:

trovare due numeri (x e y) la cui somma è 5 ed il cui prodotto è 6

possiamo scrivere le due condizioni come due equazioni in due incognite e, per indicare che le due condizioni devono essere verificate contemporaneamente, le due equazioni sono unite da una parentesi graffa:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x \cdot y = 6 \end{cases}$$

Prese separatamente,**ognuna delle equazioni precedenti ammette infinite soluzioni**, infatti attribuendo un valore alla *x* riesco a calcolare un valore per la *y* in modo che la coppia di valori (*x;y*) verifichi l'equazione:

x	y	$x + y = 5$		
2	3	$2+y = 5$	quindi	$y = 3$
1	4	$1 + y = 5$	quindi	$y = 4$
0	5	$0 + y = 5$	quindi	$y = 5$
…	…	…………………………………		

x	y	$x \cdot y = 6$		
2	3	$2 \cdot y = 6$	quindi	$y = 3$
-1	-6	$-1 \cdot y = 6$	quindi	$y = -6$
-2	-3	$-2 \cdot y = 6$	quindi	$y = -3$
…	…	…………………………………		

Risolvere il sistema significa trovare la
<u>coppia ordinata di valori</u> (*x;y*) <u>che soddisfa entrambe le equazioni</u>.

In questo caso troviamo che solamente la coppia (2;3) soddisfa sia la prima sia la seconda equazione, quindi la coppia (2;3) è la soluzione del sistema.

Per <u>COPPIA ORDINATA</u> si intende una coppia di valori in cui il primo valore si sostituisce alla x ed il secondo si sostituisce alla y e può essere scritta in due modi:

$$\mathbf{(2;3)} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x = 2} \\ \boldsymbol{y = 3} \end{cases}$$

Possiamo risolvere un sistema se abbiamo **tante equazioni quante sono le variabili** delle singole equazioni, quindi per due variabili sono necessarie due equazioni, per tre variabili sono necessarie tre equazioni, e così via.

In base al tipo di soluzioni, un sistema di 2 equazioni in 2 incognite si dice:

- **DETERMINATO** se ammette per soluzione **UNA COPPIA di valori *(x;y)***
- **INDETERMINATO** se ammette per soluzione **INFINITE COPPIE di valori**
- **IMPOSSIBILE** se **NON HA soluzioni**

Per determinare se un sistema è determinato, indeterminato o impossibile, prima di risolverlo, esiste una regola:

a) Ridurre il sistema in **FORMA NORMALE,** con i termini incogniti al primo membro ed i termini noti al secondo membro**:**

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

b) In base ai rapporti tra i coefficienti a, b e c possiamo avere:

- **SISTEMA DETERMINATO** **Se** $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$
- **SISTEMA INDETERMINATO** **Se** $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$
- **SISTEMA IMPOSSIBILE** **Se** $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

Esempi:

- Il seguente **sistema di 2 equazioni in 2 incognite** $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 5y = -7 \end{cases}$

è DETERMINATOin quanto**:** $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{-5}$

- Il seguente**sistema di 2 equazioni in 2 incognite** $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 9x + 6y = 12 \end{cases}$

è INDETERMINATOin quanto**:** $\frac{3}{9} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12}$

- Il seguente **sistema di 2 equazioni in 2 incognite** $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 9x+6y=12 \end{cases}$

è **INDETERMINATO**in quanto**:** $\frac{3}{9}=\frac{2}{6}\neq\frac{7}{12}$

<u>METODI DI RISOLUZIONE DEI SISTEMI</u>:

1) <u>METODO DI SOSTITUZIONE</u>

a) Si ricava un'incognita in funzione dell'altra

b) Si sostituisce l'espressione trovata nell'altra equazione, in modo da ottenere un'equazione in 1 incognita

c) Trovato il valore di un'incognita, si sostituisce nella prima equazione per determinare il valore dell'altra incognita.

Esempio:

$$\begin{cases} 2x+y=4 \\ 3x-5y=-7 \end{cases}$$

a) $\begin{cases} y=4-2x \\ 3x-5y=-7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y=4-2x \\ 3x-5(4-2x)=-7 \end{cases}$

$\begin{cases} y=4-2x \\ 3x-20+10x=-7 \end{cases}$ $\begin{cases} y=4-2x \\ x=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x=1 \\ y=4-2\cdot 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

La soluzione del sistema è la coppia ordinata di valori (1;2)

2) METODO DI CRAMER

a) Si riduce il sistema in forma normale: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

b) Si calcolano i determinanti:

D = $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

D_x = $\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$

D_y = $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$

c) Se $D \neq 0$, il sistema ammette una soluzione data dalla coppia di valori:

$$\begin{cases} x = \dfrac{Dx}{D} \\ y = \dfrac{Dy}{D} \end{cases}$$

Esempio:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -6x + 8y = 2 \end{cases}$$

D = $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - (-6)(-3) = 16 - 18 = -2$

D_x = $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 8 - 2(-3) = 40 + 6 = 46$

D_y = $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-6)5 = 4 + 30 = 34$

$$\begin{cases} x = \frac{Dx}{D} = \frac{46}{-2} = -23 \\ y = \frac{Dy}{D} = \frac{34}{-2} = -17 \end{cases}$$

La soluzione è la coppia di valori(-23;-17)

3) *METODO GRAFICO*

a) **Il sistema va ridotto nella forma:** $\begin{cases} \boldsymbol{y = ax + c} \\ \boldsymbol{y = a'x + c'} \end{cases}$

b) **Le due equazioni rappresentano due rette, i cui punti possono essere determinati assegnando un valore alla x e ricavando il corrispondente valore della y.**
Per disegnare una retta sono sufficienti due punti.

c) **Disegniamo le rette in un sistema di assi cartesiano in cui ogni punto è determinato da una coppia ordinata di valori (x;y):**

- Se le due rette sono **INCIDENTI**, il sistema è **DETERMINATO** e la soluzione è la coppia ordinata di valori che identifica il punto di intersezione delle due rette**;**

- Se le due rette sono **PARALLELE**, il sistema è **IMPOSSIBILE**, in quanto le rette non si incontrano mai, quindi non esistono punti in comune;

- Se le due rette sono **COINCIDENTI**, il sistema è **INDETERMINATO** ed ammette infinite soluzioni, rappresentate dalle infinite coppie ordinate di valori che identificano tutti il punti delle due rette.

Esempi:

- $\begin{cases} \boldsymbol{2x + y = 4} \\ \boldsymbol{3x - 5y = -7} \end{cases}$

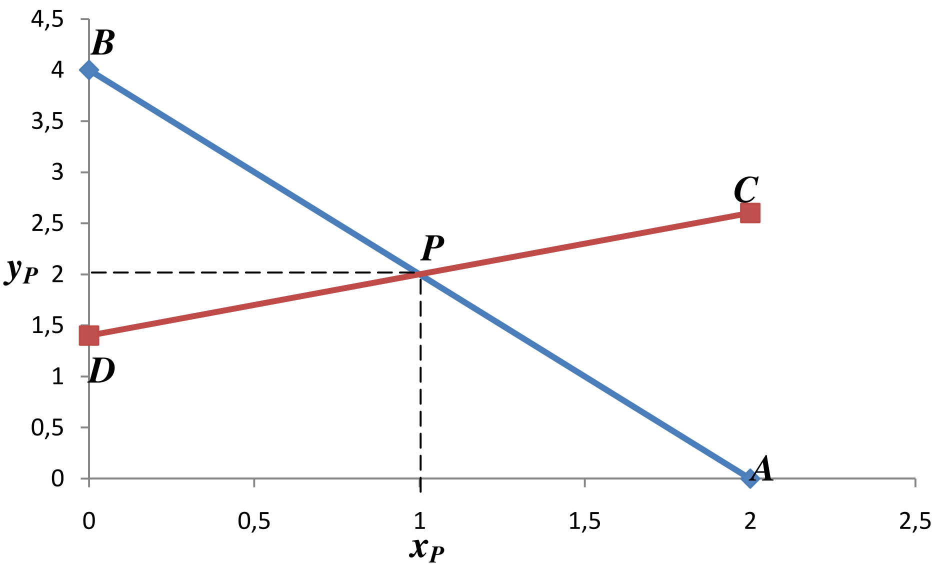
a) $\begin{cases} \boldsymbol{y = -2x + 4} \\ \boldsymbol{y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5}} \end{cases}$

b) **Retta** $\boldsymbol{y = -2x + 4}$

x	y		
2	0	$y = -2 \cdot 2 + 4 = 0$	A (2;0)
0	4	$y = -2 \cdot 0 + 4 = 4$	B (0;4)

Retta $\boldsymbol{y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5}}$

x	y		
2	2	$y = \frac{3}{5} \cdot 2 + \frac{7}{5} = \frac{13}{5}$	C $(2;\frac{13}{5})$
0	$\frac{7}{5}$	$y = \frac{3}{5} \cdot 0 + \frac{7}{5} = \frac{7}{5}$	D $(0;\frac{7}{5})$



c)

Le due rette si intersecano nel punto P di coordinate ($\boldsymbol{x_P}$;$\boldsymbol{y_P}$)
La soluzione del sistema è la coppia di valori ($\boldsymbol{x_P}$;$\boldsymbol{y_P}$), cioè (1;2)

- $\begin{cases} \mathbf{2x + y = 4} \\ \mathbf{6x + 3y = -7} \end{cases}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{y = -2x + 4} \\ \boldsymbol{y = -2x + \frac{7}{6}} \end{cases}$$

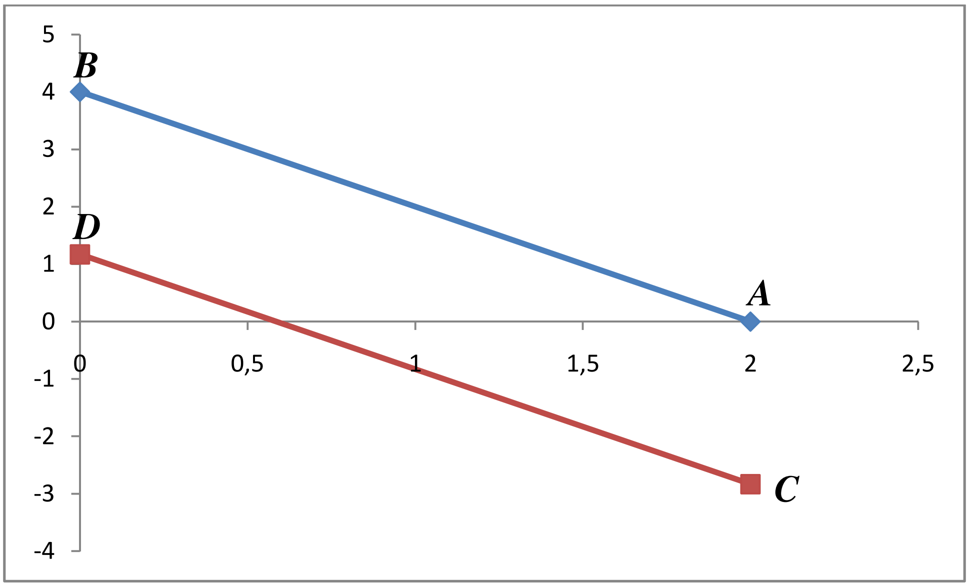
Retta $\boldsymbol{y = -2x + 4}$

x	y		
2	0	$y = -2 \cdot 2 + 4 = 0$	A (2;0)

04 $y = -2 \cdot 0 + 4 = 4$ B (0;4)

Retta $\boldsymbol{y = -2x + \frac{7}{6}}$

x	y		
2	$-\frac{17}{6}$	$y = -2 \cdot 2 + \frac{7}{6} = -\frac{17}{6}$	C (2;$-\frac{17}{6}$)
0	$\frac{7}{6}$	$y = -2 \cdot 0 + \frac{7}{6} = \frac{7}{6}$	D (0;$\frac{7}{6}$)



Le due rette sono parallele e non si incontrano mai, quindi il sistema è impossibile.

Lezione n. 5 – Giovedì 9 maggio 2013
EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Una generica equazione di secondo grado può essere scritta nella forma:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

Se $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ l'equazione $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ si dice ***COMPLETA***

Se $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$ l'equazione $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$ si dice ***SPURIA***

Se $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$ l'equazione $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$ si dice ***PURA***

I. RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Per risolvere una generica equazione di secondo grado del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ è necessario calcolare il ***DISCRIMINANTE***:

$$\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$$

Le soluzioni dell'equazione (*x_1 e x_2*) vengono calcolate con la seguente ***FORMULA RISOLUTIVA***:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

In base al valore del discriminante, possiamo distinguere tre casi:

1. $\Delta > 0$ **l'equazione ammette** ***DUE SOLUZIONI DISTINTE:***

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. $\boldsymbol{\Delta = 0}$ **l'equazione ammette** ***DUE SOLUZIONI COINCIDENTI***

$$x_1 = x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

3. $\Delta < 0$ **l'equazione NON AMMETTE** ***SOLUZIONI REALI*** in quanto non esiste la radice quadrata di un numero negativo.

Le equazioni di secondo grado INCOMPLETE possono essere risolte anche senza utilizzare la formula risolutiva :

- ***EQUAZIONI PURE*** $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$
  Isolando il termine di secondo grado e dividendo per il coefficiente a, ricordando le proprietà delle equazioni, ottengo: $\boldsymbol{x^2 = \frac{-c}{a}}$
  quindi posso ottenere le soluzioni $\boldsymbol{x_1 = +\sqrt{\frac{-c}{a}}}$ $\boldsymbol{x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}}$

- ***EQUAZIONI SPURIE*** $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$

  Mettendo in evidenza una *x* tra i due termini, l'equazione può essere scomposta come prodotto di due termini: $\boldsymbol{x(ax + b) = 0}$

  Per la legge di annullamento del prodotto, l'equazione è soddisfatta per$\boldsymbol{x = 0}$ e $\boldsymbol{ax + b = 0}$

  Quindi le due soluzioni dell'equazione sono: $\boldsymbol{x_1 = 0}$ e $\boldsymbol{x_2 = \frac{-b}{a}}$

Per quanto riguarda le *EQUAZIONI DI SECONDO GRADO FRATTE*, analogamente a quanto visto per le equazioni di primo grado, è necessario prima determinare la*CONDIZIONE DI ESISTENZA* e poi stabilire se le soluzioni trovate sono accettabili o non accettabili confrontandole con la condizione di esistenza.

II. VERIFICA DELLE SOLUZIONI

Per verificare la correttezza delle soluzioni trovate, è necessario sostituire ognuna delle due soluzioni al posto dell'incognita nell'equazione di partenza. Se le soluzioni sono corrette, svolgendo i calcoli otterremo un'***IDENTITÀ***.

Esempio:
verifica che i valori$x = 2$ e $x = 1$sono soluzioni dell'equazione$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(2)^2 - 5(2) + 6 = 0$	$(1)^2 - 5(1) + 6 = 0$
$4 - 10 + 6 = 0$	$1 - 5 + 6 = 0$
$0 = 0$	$2 = 0$
quindi la soluzione$x = 2$ è corretta	quindi la soluzione $x = 1$nonè corretta

III. *SCOMPOSIZIONE DI UN POLINOMIO DI SECONDO GRADO:*

Un qualunque polinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$ può essere scomposto calcolando le soluzioni (x_1e x_2) dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

Esempio:

scomporre il polinomio $6x^2 + 11x - 2$ sapendo che le soluzioni dell'equazione
$6x^2 + 11x - 2 = 0$sono $x_1 = -2$ e $x_2 = \frac{1}{6}$

Applicando la formula $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ ottengo:

$$6x^2 + 11x - 2 = 6\,[x - (-2)](x - \frac{1}{6}) = 6(x + 2)(x - \frac{1}{6})$$

IV. *RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DI UN POLINOMIO DI SECONDO GRADO*

Nel piano cartesiano, un polinomio di secondo grado può essere rappresentato come una ***PARABOLA*****i cui punti di intersezione con l'asse *x* sono le soluzioni dell'equazione (*x_1*e *x_2*).**

In base al valore del discriminante, possiamo avere 3 casi:

$\Delta > \mathbf{0}$ $\Delta = \mathbf{0}$ $\Delta < 0$